Vérifions ce résultat par récurrence :

• Pour n = 0 , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$ est vraie .

• Supposons que pour un entier donné n on a :

$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et montrons que

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$

On a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ (d'après 2°/ a))

$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

D'où $\lim_{x \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0$ et par suite $\lim_{x \to +\infty} U_n = \alpha$

Conclusion : (U_n) est une suite convergente vers α .